

ΤΕΤΑΡΤΗ 10 ΜΑΪΟΥ 2021 - ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

- Στην άσκηση με το παρ/μο, αν δώσω μια δίσκ που είναι το π/μο και τα σημεία
Είναι κυλινδρικά τότε:



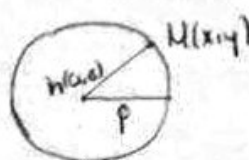
$$E = \frac{1}{2} |AB \times AC| + \frac{1}{2} |CB \times CD|$$

Ο ΚΥΚΛΟΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ Οxy :

~~Εξίσωση του κύκλου~~

$$(μελέτη της Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + 2 = 0)$$

ΟΡΙΣΜΟΣ : Ο γεωμετρικός ορισμός των σημείων που ισομετρουν σταθερή απόσταση ρ (ακτίνα)
από σταθερό σημείο $h(a, b)$ (κέντρο)



$$|h\vec{M}| = \rho, \text{ με } h\vec{M} = (x-a, y-b) \Rightarrow |h\vec{M}| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = \rho$$

$$\Rightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = \rho^2 \quad \text{(Εξίσωση κύκλου στο επίπεδο Οxy)}$$

$$[\text{π.χ. Έστω κύκλος } h(1, 2), \rho = 3 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 3^2]$$

$$(1) \Rightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = \rho^2 \Rightarrow x^2 - 2ax + y^2 - 2by - (\rho^2 - a^2 - b^2) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$$

$$\text{και αντίστροφα : } x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 2\frac{A}{2}x + \left(\frac{A}{2}\right)^2 - \left(\frac{A}{2}\right)^2 + y^2 + 2\frac{B}{2}y + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - \left(\frac{B}{2}\right)^2 + \Gamma = 0$$

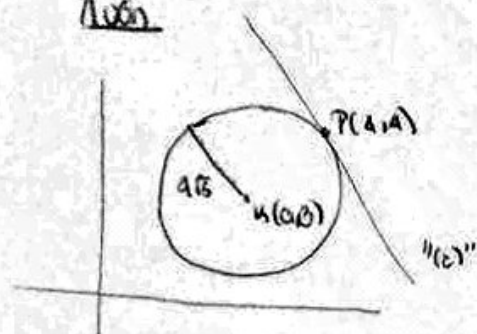
$$\Rightarrow \left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 = \frac{A^2 + B^2 - 4\Gamma}{4} = R$$

$$\bullet \text{ Αν } R > 0 : \text{ κύκλος κέντρο } h\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) \text{ και ακτίνα } \sqrt{R} = \rho$$

- Αν $k < 0$ δεν επαληθεύεται από οθήκη
- Αν $k = 0$ παριστάνει οθήκη $((x-a)^2 + (y-b)^2 = 0$. Αν πάλι $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 0$ παριστάνει το σημείο (a, b) (ή να συνδυαστεί με την $k < 0$ και $k = 0$ να είναι $k = 0$)

Παραδειγμα: Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου με ακτίνα $\rho = 4\sqrt{5}$ και ο οποίος εφάπτεται της $(\ell): x + 2y = 12$ στο σημείο $P(4, 4)$.

Λύση



⊕ Συμπίπτει ότι η ακτίνα ενός κύκλου είναι κάθετη σε εφασταμένη του στο σημείο P_0 αυτού.

(Η εξίσωση του ζητούμενου κύκλου: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = (4\sqrt{5})^2 = 80$)

(Υπενθύμιση: Εδώ να θυμόμαστε από οθήκη $(x_1, y_1), (x_2, y_2): y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$)
 $\lambda(\ell):$ συνεκτική Σ.Ε. Δ. Γ.

Αλλά: $x + 2y = 12 \xrightarrow{\text{φασ. } (\ell)} y = -\frac{1}{2}x + 6 \Rightarrow \lambda(\ell) = -\frac{1}{2}$

Άρα: η ακτίνα (ως ευθεία) έχει συνεκτική συνιστώσα: $\frac{b-4}{a-4}$ } $\Rightarrow$ αφού συνιστώσα κάθετα είναι

ότι: $\lambda_A \cdot \lambda(\ell) = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow -\frac{1}{2} \frac{b-4}{a-4} = -1 \Rightarrow b-4 = 2(a-4) \Rightarrow |2a-b=4|$

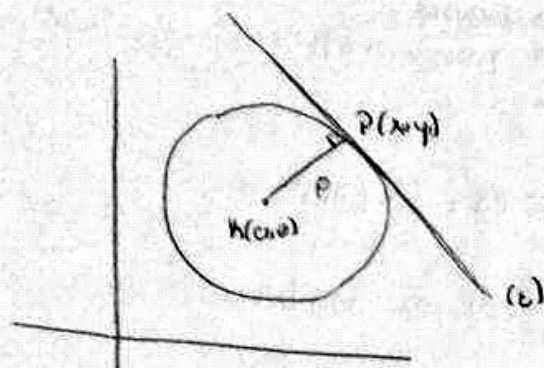
Από αυτήν βρεθεί ο κέντρο

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = 80 \xrightarrow{P \in \Gamma} (4-a)^2 + (4-b)^2 = 80$

$\Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} a=0, b=-4 \\ a=8, b=12 \end{cases}$

Συνεπώς, οι ζητούμενοι - πέντε κύκλοι είναι:

$\begin{cases} C_1: (x-8)^2 + (y-12)^2 = 80 \\ \text{και} \\ C_2: x^2 + (y+4)^2 = 80 \end{cases}$



Εξίσωση του κύκλου: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

Εξίσωση της (L):

$$y - y_1 = \lambda_{(L)} (x - x_1) \quad \lambda_{(L)} =$$

Αλλά $\lambda_1 = \frac{y_1 - b}{x_1 - a}$: διτεταγμένης διεύθυνσης (L) στο κέντρο.

Γνωρίζουμε ότι ακτίνα L εφαπτομένη (L)

Από (L), (2) : $\lambda_{(L)} \cdot \lambda_1 = -1 \Leftrightarrow \lambda_{(L)} \cdot \frac{y_1 - b}{x_1 - a} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{(L)} = - \frac{x_1 - a}{y_1 - b}$

Αρα, αντικαθιστώντας: $y - y_1 = - \frac{x_1 - a}{y_1 - b} (x - x_1) \Rightarrow (y - y_1)(y_1 - b) + (x - x_1)(x_1 - a) = 0$

Αρα: $((y - b) - (y_1 - b))(y_1 - b) + ((x - a) - (x_1 - a))(x_1 - a) = 0$

$$\Rightarrow (y - b)(y_1 - b) - (y_1 - b)^2 + (x - a)(x_1 - a) - (x_1 - a)^2 = 0$$

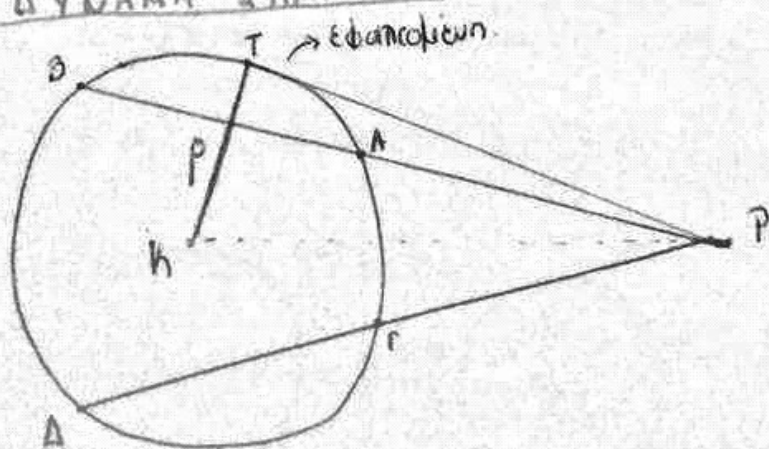
$$\Rightarrow (x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) = (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2$$

Ισχύει ότι: $(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = r^2$, γιατί το $P(x_1, y_1)$ είναι σημείο του κύκλου.

Συνεπώς, έχουμε ότι: $(x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) = r^2$: εφαπτομένη κύκλου κέντρου $K(a, b)$, ακτίνας r , σε σημείο $P(x_1, y_1)$.

[• Αν ο κύκλος έχει κέντρο $(0, 0)$ η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι: $xx_1 + yy_1 = R^2$]

ΔΥΝΑΜΗ ΣΗΜΕΙΟΥ



αποδεικνύεται ότι:

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD = PT^2 \quad (\text{ορθολογική τρίγωνο})$$

Έστω κύκλος $\Gamma(K, r)$ και σημείο P προς αυτά.

↳ αποδεικνύεται ότι $PA \cdot PD = PG \cdot PB = (PK)^2 - \rho^2 (= (PI)^2)$
 Αυτό ισχύει αν το σημείο P είναι
 εκτός του κύκλου.

• Αν το P είναι εσωτερικό του κύκλου τότε: $PA \cdot PB = PG \cdot PD = \rho^2 - (PK)^2$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ο αριθμός $\delta = (PK)^2 - \rho^2$ (ή $\rho^2 - (PK)^2$) ορίζεται ως δύναμη του σημείου P ως προς κύκλο $\zeta(K, \rho)$

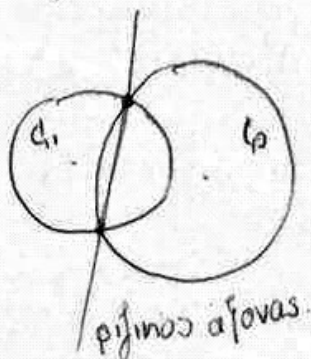
ΠΙΣΤΩΣ ΑΞΩΝΑΣ

Έστω κύκλοι $\zeta_1: x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$, $\zeta_2: x^2 + y^2 + A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που έχουν ίδια δύναμη ως προς τους κύκλους ζ_1, ζ_2 ορίζεται ως ριζικός άξονας των ζ_1, ζ_2 και έχει εξίσωση $x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + \Gamma_1 = x^2 + y^2 + A_2x + B_2y + \Gamma_2 \dots$

Παρατηρήσεις

(1) Αν οι κύκλοι τέμνονται, ο ριζικός άξονας είναι η ευθεία που ενώνει τα σημεία κοπής των ζ_1 και ζ_2

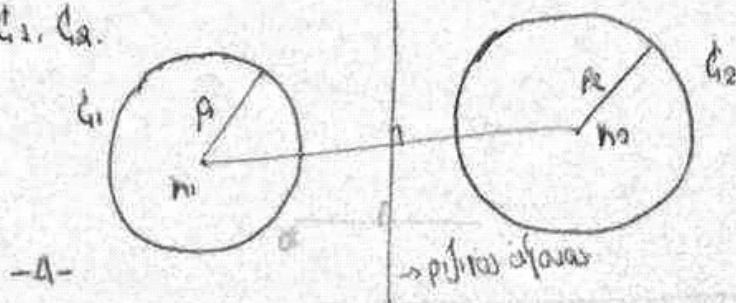


(2) Ο ριζικός άξονας είναι ευθεία γιατί:

$$x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + \Gamma_1 = x^2 + y^2 + A_2x + B_2y + \Gamma_2 \Leftrightarrow (A_1 - A_2)x + (B_1 - B_2)y + (\Gamma_1 - \Gamma_2) = 0$$

που παριστάει εξίσωση ευθείας

Ιδιότητα: Έστω κύκλοι $\zeta_1(K_1, \rho_1)$, $\zeta_2(K_2, \rho_2)$. Ο ριζικός άξονας των ζ_1, ζ_2 είναι ευθεία κάθετη στον διόκετρο ℓ των ζ_1, ζ_2 .



Απόδειξη:

Έστω $\zeta_1: x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$, $k_1(-\frac{A_1}{2}, -\frac{B_1}{2})$

$\zeta_2: x^2 + y^2 + A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$, $k_2(-\frac{A_2}{2}, -\frac{B_2}{2})$

Εάν το ζεύγος (x, y) είναι λύση του συστήματος (ζ_1, ζ_2) τότε ισχύει $(-y, x)$

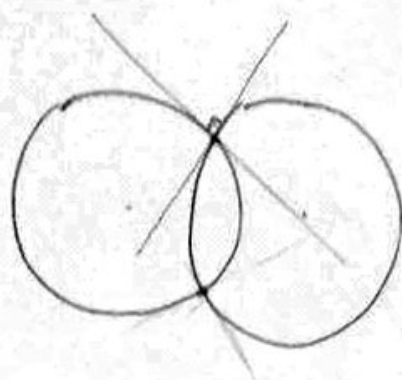
Άρα $k_1 k_2 = (\frac{A_1 - A_2}{2}, \frac{B_1 - B_2}{2})$

Παρατηρούμε ότι το $\vec{a} = (A_1 - A_2, B_1 - B_2) \perp (c)$

[πίστις άξονα: $(A_1 - A_2)x + (B_1 - B_2)y + (\Gamma_1 - \Gamma_2) = 0$] Άρα $k_1 k_2 = \frac{1}{2} \vec{a} \Rightarrow k_1 k_2 \perp \vec{a}$ (εξισορροπία)

Καθώς $\vec{a} \perp (c) \Rightarrow k_1 k_2 \perp (c) \Rightarrow$ διανύσματα $\perp$ πίστις άξονα.

ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΙ ΚΥΚΛΩΝ:



Έστω κύκλοι $\zeta_1: x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$

$\zeta_2: x^2 + y^2 + A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$

ΟΡΙΣΜΟΣ Οι κύκλοι ζ_1, ζ_2 λέγονται ορθογώνιοι (ή τέμνονται ορθογώνια) αν οι εφαπτομένες στα σημεία τομής τους εώς τέμνονται κάθετα.

Λειτουργία ορθογωνιότητας δύο κύκλων

Έστω κύκλοι $\zeta_1: x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$, $\zeta_2: x^2 + y^2 + A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$
οι οποίοι είναι ορθογώνιοι $\hookrightarrow k_1(-\frac{A_1}{2}, -\frac{B_1}{2})$ $\hookrightarrow k_2(-\frac{A_2}{2}, -\frac{B_2}{2})$

οι οποίοι είναι ορθογώνιοι

$\Rightarrow$ οι εφαπτομένες εώς τέμνονται κάθετα. (1)

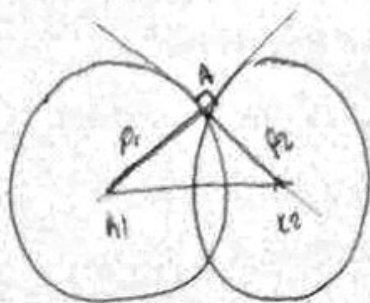
και οι ατίνας των κύκλων είναι κάθετες στα εφαπτομένες (2)

Τότε από (1), (2) (μονοδικονία της καθεμιάς) οι εφαπτομένες των ζ_1, ζ_2 διέρχονται

από το κέντρο των ζ_2, ζ_1 αντίστοιχα.

και τότε το ορθογώνιο $A k_1 k_2$

ισχύει $(k_1 k_2)^2 = p_1^2 + p_2^2$ (*) $\rightarrow$
 $\hookrightarrow k_1 k_2 = (\frac{A_1 - A_2}{2}, \frac{B_1 - B_2}{2})$



αντικαθίστουμες στην (*) τα $k_1(-\frac{A_1}{2}, -\frac{B_1}{2})$, $k_2(-\frac{A_2}{2}, -\frac{B_2}{2})$ και $p_1 = \frac{A_1^2 + B_1^2 - 4\Gamma_1}{4}$

$$p_2 = \frac{A_2^2 + B_2^2 - 4\Gamma_2}{4}$$

προκύπτει ότι :

$$\boxed{A_1 A_2 + B_1 B_2 - 2(\Gamma_1 + \Gamma_2) = 0}$$

ή ισοδύναμα αν θέλουμε δύο
κύκλους να είναι ορθογώνιοι.